Realni brojevi – zadaci sa deljivošću

Primer 1.

Ako je n prirodan broj onda je i $\frac{n^3-n}{6}$ prirodan broj. Dokazati.

Rešenje:

Mi ustvari trebamo dokazati da je n^3-n deljivo sa 6.

Ideja je da ovaj izraz napišemo kao proizvod:

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1)$ dobili smo proizvod tri uzastopna prirodna broja. Od njih je jedan sigurno deljiv sa 3 a bar jedan je paran, što znači da je deljiv sa 2.

Kako je 6=3*2 dokazali smo da je n^3-n deljivo sa 6 odnosno da je $\frac{n^3-n}{6}$ prirodan broj.

Primer 2.

a) Dokazati da je n^3+11n deljivo sa 6
b) Dokazati da je n^3+5n deljivo sa 6
c) Dokazati da je n^3-19n deljivo sa 6

Rešenje:

a)

U sva tri primera ćemo iskoristiti prethodni zadatak u kome smo dokazali da je n^3-n deljivo sa 6. Ideja je da izraze transformišemo na oblik n^3-n + nešto. Idemo redom:

$$n^3+11n=n^3-n+12n \quad \text{(11n smo zapisali kao -n + 12n, ništa nismo promenili u zadatku)}$$
$$=(n-1)n(n+1)+12n$$

Proizvozvod 3 uzastopna broja je sigurno deljiv sa 6 (prethodni zadatak) a 12n je takođe deljivo sa 6 zbog 12. Zbir dva broja deljiva sa tri je takođe deljiv sa 6.

b)

$$n^3+5n=n^3-n+6n \quad \text{(5n smo zapisali kao -n + 6n)}$$
$$=(n-1)n(n+1)+6n$$

c)

$$n^3-19n=n^3-n-18n \quad \text{(-19n smo zapisali kao -n -18n)}$$
$$=(n-1)n(n+1)-18n$$

Primer 3.

a) Dokazati da je $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ deljivo sa 14 za n iz skupa prirodnih brojeva

b) Dokazati da je $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ deljivo sa 155 za n iz skupa prirodnih brojeva

Rešenje:

a)

Ideja je da koristimo pravilo za stepenovanje $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, pa izvučemo zajednički ispred zagrade:

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2^n \cdot 2^1 + 2^n \cdot 2^2 = 2^n(1+2+4) = 2^n \cdot 7$$

Kako je 14 = 2*7 broj $2^n \cdot 7$ je deljiv sa 14 jer ima bar jednu dvojku (jer $n \in N$) i ima 7 u proizvodu.

b)

$$5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n + 5^n \cdot 5^1 + 5^n \cdot 5^2 = 5^n(1+5+25) = 5^n \cdot 31$$

Kako je 155 = 5 *31 i $n \in N$ objašnjenje analogno prethodnom primeru.

Primer 4.

Dokazati da je za $n \in N$ broj $n^5 - n$ deljiv sa 5.

Rešenje:

Prvo transformišemo izraz i napišemo ga u obliku proizvoda:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(\underbrace{(n^2)^2 - 1^2}_{\text{razlika kvadrata}}) = n\ \underbrace{(n^2 - 1)}_{\text{razlika kvadrata}}\ (n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

$$\text{Dakle}: n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

Pošto je u pitanju deljivost sa 5 sve prirodne brojeve možemo opisati kao:

$n = 5k$

$n = 5k + 1$

$n = 5k + 2$

$n = 5k + 3$

$n = 5k + 4$

I za svaku od ovih pet situacija moramo uraditi dokaz. Kako ? Menjamo u našem proizvodu redom vrednosti za n i tražimo broj 5 u njemu.

$\underline{\text{Za } n = 5k}$

$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = \boxed{5}k(5k-1)(5k+1)(5k^2+1)$ Našli smo 5, idemo dalje...

Za $n = 5k+1$

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = (5k+1)(5k\cancel{+1}\cancel{-1})(5k+1+1)((5k+1)^2+1)$$

$$= (5k+1)\boxed{5}k(5k+2)((5k+1)^2+1)$$

Za $n = 5k+2$

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = (5k+2)(5k+2-1)(5k+2+1)(\underbrace{(5k+2)^2}_{\text{kvadrat binoma}}+1)$$

$$= (5k+2)(5k+1)(5k+3)(25k^2+20k+4+1)$$

$$= (5k+2)(5k+1)(5k+3)\underbrace{(25k^2+20k+5)}_{\text{izvučemo 5 kao zajednički}}$$

$$= (5k+2)(5k+1)(5k+3)\boxed{5}(5k^2+4k+1)$$

Za $n = 5k+3$

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = (5k+3)(5k+3-1)(5k+3+1)(\underbrace{(5k+3)^2}_{\text{kvadrat binoma}}+1)$$

$$= (5k+3)(5k+2)(5k+4)(25k^2+30k+9+1)$$

$$= (5k+2)(5k+1)(5k+3)\underbrace{(25k^2+30k+10)}_{\text{izvučemo 5 kao zajednički}}$$

$$= (5k+2)(5k+1)(5k+3)\boxed{5}(5k^2+6k+2)$$

Za $n = 5k+4$

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = (5k+4)(5k+4-1)(5k+4+1)((5k+4)^2+1)$$

$$= (5k+4)(5k+3)\underbrace{(5k+5)}_{\text{izvučemo 5}}((5k+4)^2+1)$$

$$= (5k+4)(5k+3)\boxed{5}(k+1)((5k+4)^2+1)$$

Naziremo ovde kao neki postupak za rad:

Najpre dati izraz rastavimo na činioce.

Ako nije očigledna deljivost onda moramo polako, „ pešački“, dati broj opisati preko svih mogućnosti i za svaku dokazujemo posebno.

Recimo da je bila u pitanju deljivost sa 7, sve brojeve bi opisali kao:

$$n = 7k, n = 7k+1, n = 7k+2, n = 7k+3, n = 7k+4, n = 7k+5, n = 7k+6$$

Primer 5.

Dokazati da je za $\forall n \in N$ razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ redukovan.

Rešenje:

Trebamo dokazati da se ovaj razlomak ne može skratiti.

$\frac{21n+4}{14n+3} = \frac{14n+3+7n+1}{14n+3}$ (gore rastavimo da bude kao donji izraz i šta pretekne)

Dalje koristimo $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$$\frac{14n+3}{14n+3} + \frac{7n+1}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}$$

Za drugi razlomak korisimo $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

$$1 + \frac{7n+1}{14n+3} = 1 + \frac{1}{\frac{14n+3}{7n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{7n+1+7n+1+1}{7n+1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7n+1}}$$

Kako je $\frac{1}{7n+1}$ redukovan I početni razlomak je neskrativ.

Primer 6.

Dokazati da je razlomak $\frac{2n+3}{5n+7}$ redukovan.

Rešenje:

$$\frac{2n+3}{5n+7} = \frac{1}{\frac{5n+7}{2n+3}} = \frac{1}{\frac{2n+2n+3+3+n+1}{2n+3}} = \frac{1}{2 + \frac{n+1}{2n+3}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{2n+3}{n+1}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{n+n+1+1+1}{n+1}}} =$$

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{n+1}}}$$

$\frac{1}{n+1}$ je redukovan pa je i ceo razlomak redukovan.

Primer 7.

Dokazati da je

a) $67^8 - 1$ deljiv sa 10
b) $9^{2k} + 14$ deljiv sa 5

Rešenje:

Za rešavanje ovakvog tipa zadatka postoji više ideja.

a)

I način

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 &= (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) \\ &= ((a^2)^2 - (b^2)^2)(a^4 + b^4) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \\ &= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \end{aligned}$$

Ako ovo primenimo na naš zadatak:

$$67^8 - 1^8 = (67 - 1)(67 + 1)(67^2 + 1^2)(67^4 + 1^4) = 66 \cdot 68 \cdot \boxed{4490} \cdot (67^4 + 1)$$

Našli smo činilac deljiv sa 10.

II način

Razmišljamo koja je zadnja cifra u broju $67^{\text{na nešto}}$

$67^1 = 6\underline{7}$

$67^2 = 448\underline{9}$

$67^3 = 67 \cdot 4489 = ...3$ (jer je $7 \cdot 9 = 63$)

$67^4 = 67 \cdot ......3 = ...1$ (jer je $7 \cdot 3 = 21$)

$67^5 = 67 \cdot ......1 = ...7$ (jer je $7 \cdot 1 = 7$)

$67^6 = 67 \cdot ......7 = ...9$ (jer je $7 \cdot 9 = 63$)

$67^7 = 67 \cdot ......9 = ...3$ (jer je $7 \cdot 9 = 63$)

$67^8 = 67 \cdot ......3 = ...1$ (jer je $7 \cdot 3 = 21$)

Dakle 67^8 se završava sa 1 pa kad oduzmemo 1, tu ostaje 0 i broj će biti deljiv sa 10.

b)

Razmišljamo kojim brojem se završava $9^{\text{paran broj}}$

$$9^2 = 81$$
$$9^4 = 81 \cdot 81 = 6561$$
$$9^6 = 6561 \cdot 81 = ...1$$
$$9^8 = ...1 \cdot 81 = ...1 \text{ itd.}$$

Dakle $9^{\text{paran broj}}$ se završava jedinicom pa kad dodamo 14 zadnja cifra će biti 5, pa je odna taj broj deljiv sa 5.

www.matematiranje.in.rs